师：我们可以从图5的角度理解相关系数与两个n维向量夹角之间的关系．当$r>0$时，两个n维向量夹角越小，两个变量的线性相关性越强，相关系数的值越大．当$r<0$时，两个n维向量夹角越大，两个变量的线性相关性越强，相关系数的值越小．

师：我们梳理下相关系数定义的内涵和意义．

（1）相关系数$r=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i-\overline{y})^2}}$衡量两个变量之间线性关系的强弱．

（2）$r\in[-1,1]$．

（3）r为正时，表明变量x和y正相关；r为负时，表明变量x和y负相关．

（4）对于变量x,y，如果$|r|\in[0.75,1]$，那么相关性很强；如果$|r|\in(0.25,0.75)$，那么相关性一般；如果$|r|\in[0,0.25]$，那么相关性较弱．

3 教学反思

3.1 构建有意义、关联性的学习，帮助学生理解学习概率统计知识

在面对概率统计中的概念与公式时，很多教师认为这部分只是套用公式，而在公式教学时只是呈现公式，并未讲公式的来龙去脉．很多学生困惑这些公式从哪来，为何要引进如此复杂的公式，于是概率与统计也便成为学生学习比较困难的地方．但是随着时代发展，概率统计知识日益重要，统计教育不能仅囿于看看书、算算题．教师应努力构建有意义、关联性的学习，帮助学生理解概率统计知识．

3.2 培养学生从生活中抽取概率统计问题模型，提高统计素养，体会建模思想

传统的统计教育一个明显的弊端就是教学偏重理论，缺乏直观．本文对相关系数定义教学进行重构时尝试更多结合生活实例，期望在构造对相关系数定义理解的基础上，提高学生利用相关系数分析日常生活中的问题，并能用统计的观点对统计结果进行评判，这就是统计素养．在高中阶段，学生深刻理解相关系数的定义，可以理解统计模型中模型优劣的评判标准，有利于培养学生的建模思想．

参考文献

[1]中华人民共和国教育部．普通高中数学课程标准（2017年版）[M]．北京：人民教育出版社，2018

[2]人民教育出版社，课程教材研究所，中学数学课程教材研究开发中心．普通高中教科书（A版）：数学（必修第三册）（选修2-1）（选修2-3）[M]．北京：人民教育出版社，2009

[3]李俊．中小学概论统计教学研究[M]．上海：华东师范大学出版社，2018

（本文系广东教育学会2018年度（下半年）教育科研规划小课题《高中概率统计学习认知障碍分析与对策研究》（课题编号：GDXKT16172）阶段成果之一）

关注概念理解，拓宽解题视野

——有关平面向量数量积的投影概念的学习和应用

林海川　福建省漳州市东山第一中学（363400）

在学习数学的过程中，概念学习是不可或缺的过程，数学概念是理解数学命题和解决数学问题的基础．在新知识的学习过程中，往往会有新概念的引入或者新定义的出现．有些概念或定义容易在学习的过程中，因为不加以重视理解而被忽视或者产生混淆，如直线的截距，函数的零点、极值点，异面直线的成角，平面向量的投影等．所以笔者认为，在新知识的学习过程中，对新的概念或定义作具体深入的分析和阐述，或将其与之前所学的数学概念进行类比和区别是很有必要的．在此基础上，才能促使学生对概念的真正理解，使得学生有意识地使用进而善于使用，生成相应的解题思路和方法，拓宽解题的视野，提升数学的理性思维及应用能力．

1 知识背景

平面向量的学习中，主要从基底化的思想，坐标化的运算和几何量（模长、夹角、投影等）的应用三个维度进行学习．其中平面向量的数量积运算集中体现这三个维度的运用，也是在学习三角余弦两角和差公式和正余弦定理的知识过程中常用的证明方法，是该章节学习过程中的重点内容．

人教A版高中数学教科书必修4对于平面向量的数量积给出了如下的定义：已知两个非零向量$\boldsymbol{a}$

和$\boldsymbol{b}$，我们把数量$|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$叫做$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的数量积（或内积），记作$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$，即$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$，其中$\theta$为$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的夹角，$|\boldsymbol{a}|\cos\theta$（$|\boldsymbol{b}|\cos\theta$）叫作向量$\boldsymbol{a}$在$\boldsymbol{b}$方向上（向量$\boldsymbol{b}$在$\boldsymbol{a}$方向上）的投影[1]．我们规定，零向量与任一向量的数量积为0．

在以上的定义中，教材特别指出了投影的概念，从以下图形帮助学生理解投影这个新的概念在几何图形上所表示的意义．

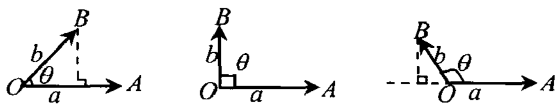

图1

特别地，当两个非零向量同向共线时，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$；当两个非零向量反向共线时，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|$；当两个非零向量垂直时，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$．

数量积的概念中，特别强调了投影的概念，应当注意到以下几点：

（1）数量积的运算，需要涉及两个向量的模长和夹角共三个量，数量积结果是一个数量．

（2）其中$|\boldsymbol{a}|\cos\theta(|\boldsymbol{b}|\cos\theta)$作为向量$\boldsymbol{a}$在$\boldsymbol{b}$方向上的投影（向量$\boldsymbol{b}$在$\boldsymbol{a}$方向上的投影）成为新的量，则整个数量积的运算就只需要考虑两个量．

（3）投影是一个数量，同时必须注意是哪个向量在哪个向量方向上的投影．

（4）投影数值的正负与两向量的夹角有关．

（5）投影可以帮助我们理解数量积的运算性质，如$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$，即考虑$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$在$\boldsymbol{c}$方向上的投影等于$\boldsymbol{a}$在$\boldsymbol{c}$方向上的投影和$\boldsymbol{b}$在$\boldsymbol{c}$方向上的投影之和．

投影的概念为平面向量数量积的运算提供的新的思考角度和计算方式，拓宽了解题的视野．尽管数量积是一个数量，但是模长、夹角、投影都体现了几何的维度，所以运用投影计算数量积时，往往伴随着对几何图形的分析．在数量积的解题应用过程中，由于对基底化思想的强化和坐标运算的应用，学生往往不善于从投影的角度来看待数量积，也因此在解题思路上形成了一定的固化模式，忽视了投影这一知识的应用．

以下笔者从平时课堂教学中选取若干实例，阐释如何引导学生有意识地应用投影的概念解决向量数量积的相关问题．

2 案例评析

例1 在直角三角形ABC中，$\angle C=\dfrac{\pi}{2}$，$AC=6$，则$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=$___________．

生1：$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB})\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AC}^2+\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AC}^2=36$．

生2：以点C为坐标原点，建立坐标系，设点$A(6,0)$，点$B(0,b)$，$\overrightarrow{AB}=(-6,b)$，$\overrightarrow{AC}=(-6,0)$，所以$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=36$．

生3：$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=|\overrightarrow{AC}|^2=36$，其中$|\overrightarrow{AB}|\cos A=|\overrightarrow{AC}|$，所以$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=|\overrightarrow{AC}|^2=36$．

评析 生1和生2两种方法很好地运用了基底化分解和坐标化运算的思路，也代表了大多数学生的解题思路．生3从数量积的定义出发，应用数量积中投影的概念，从而解决这一问题．该例子等价于：在以AB为直径的圆上，点C为圆上的一点，则可求得$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=|\overrightarrow{AC}|^2$．

例2 已知在ΔABC中，$AB=4$，$AC=6$，该三角形外接圆的圆心为O，则$\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{BC}=$______．

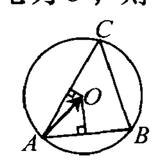

图2

解析 如图2，$\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AO}\cdot(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})$

$$=\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}^2-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}^2=10．$$

例3 已知椭圆$\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$的左、右焦点分别为F_1,F_2，点M为椭圆上异于长轴端点的动点，ΔMF_1F_2的内心为I，则$\dfrac{\overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{MF_2}}{|\overrightarrow{MF_2}|}=$___________．

生4：特别地，取点M为短轴端点（如图3），椭圆中，$a=\sqrt{2}$，$b=1$，$c=1$，则由$S_{\Delta MF_1F_2}=\dfrac{1}{2}(2a+2c)r=\dfrac{1}{2}\cdot 2c\cdot b$，可知$r=\sqrt{2}-1$，所以$I(0,\sqrt{2}-1)$，$M(0,1)$，$F_2(1,0)$，$\overrightarrow{MI}=(0,\sqrt{2}-2)$，$\overrightarrow{MF_2}=(1,-1)$，进而得到$\dfrac{\overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{MF_2}}{|\overrightarrow{MF_2}|}=\sqrt{2}-1$．

生5：注意到$\dfrac{\overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{MF_2}}{|\overrightarrow{MF_2}|}$即为$\overrightarrow{MI}$在$\overrightarrow{MF_2}$方向上

的投影，即为$|MC|$（如图 4），由$|MA|=|MC|$，$|F_1A|=|F_1B|$，$|F_2B|=|F_2C|$，所以$|MC|=\dfrac{2a-2c}{2}=a-c=\sqrt{2}-1$．

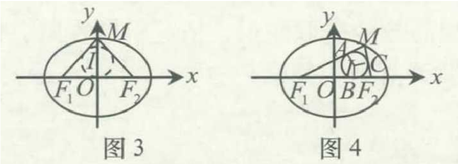

图3　　图4

评析 生 4 通过大胆地取特殊位置，很好地将向量坐标具体表示出来，得到具体的运算结果．这种小题小做（只求对不求真）的方法，或是考试的一种高效的得分策略，需要一定敏锐的观察能力，然而不应该是平时学习的一种常态．生 5 很敏感地察觉到代数式所对应的几何意义，同时使用平几知识和椭圆的定义，充分利用数学的概念和性质，体现了对数学概念的深刻理解和应用能力．

例 4 已知在ΔABC中，角A,B,C所对的边分别为a,b,c，且$C=\dfrac{\pi}{3}$，$c=2$，则当$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$取得最大值时，$\dfrac{b}{a}$的值为__________．

生 6：以AB所在直线为x轴，边AB的中点为原点建立坐标系（如图 5），$c=2$，$C=\dfrac{\pi}{3}$可知ΔABC的外接圆$\odot D$直径为$2R=\dfrac{2}{\sin\frac{\pi}{3}}=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$，即点$C$在优弧$\overset{\frown}{AB}$上运动，$\angle ADB=\dfrac{2\pi}{3}$，$\odot D$的方程为$x^2+(y-\dfrac{\sqrt{3}}{3})^2=\dfrac{4}{3}$．设$C(x,y)$，$\overrightarrow{AB}=(2,0)$，$\overrightarrow{AC}=(x+1,y)$，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=2x+2$，所以当$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$取得最大值时，此时$C$的横坐标最大，此时$C$ $(\dfrac{2\sqrt{3}}{3},\dfrac{\sqrt{3}}{3})$，此时$\dfrac{b}{a}=\dfrac{AC}{BC}=2+\sqrt{3}$．

生 7：$c=2$，$C=\dfrac{\pi}{3}$可知ΔABC的外接圆直径为$2R=\dfrac{2}{\sin\frac{\pi}{3}}=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$，即点$C$在优弧$\overset{\frown}{AB}$上运动，当$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$取得最大值时，该问题从动态转化成静止的情况，那么关键是如何找到这个静止时刻的点C的位置，当$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$取得最大值时，等价于$\overrightarrow{AC}$在$\overrightarrow{AB}$方向上的投影达到最大，即当直线$l$垂直于直线$AB$，且与圆相切时，切点即为点$C$的位置所在，如图6所示，由圆的切线性质可得$\angle BCD=\angle A$，所以$\angle A+\angle BCD+\dfrac{\pi}{3}=2\angle A+\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\pi}{2}$，可得$\angle A=\dfrac{\pi}{12}$，在$\Delta ABC$中，有正弦定理可得$\dfrac{b}{a}=\dfrac{\sin\angle CBA}{\sin\angle A}=\dfrac{\sin\frac{7\pi}{12}}{\sin\frac{\pi}{12}}=\dfrac{\cos\frac{\pi}{12}}{\sin\frac{\pi}{12}}=2+\sqrt{3}$．

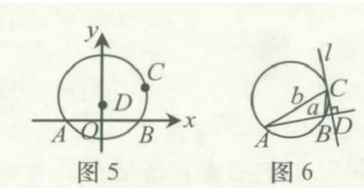

图5　　图6

评析 有些学生表示建系坐标化符合自己的思维习惯，与自己的解题能力较为贴近，若在考试中，数学解题从熟悉的角度和常用的方法入手，这是很自然的思维习惯．但在平时的学习中应该勇于接受新的方法，尝试新的角度，拓宽自己的解题视野，丰富解题模型，只接受熟悉的套路是一种惰性思维的体现，无法接受和理解则不能熟练掌握，结果只会越排斥，进而使解题视野变得狭小．

例 5 已知O为坐标原点，动点A在圆$C_1:(x-1)^2+y^2=1$上运动，动点B在圆$C_2:(x-2)^2+y^2=1$上运动，则$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$的最小值为____________．

解析 （从投影的角度上）首先对于任意一个确定的$\overrightarrow{OA}$，当向量$\overrightarrow{OB}$在$\overrightarrow{OA}$方向上的投影达到最小时，此时$C_2B//OA$，BE为圆C_2的切线即$BE\perp C_2B$，$BE\perp OA$（如图 7 所示）．此时$\overrightarrow{OB}$在$\overrightarrow{OA}$方向上的投影为$-|OE|=-|BD|=-(1-2\cos\theta)$．其中$|\overrightarrow{OA}|=2\cos\theta$，$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}\geq-|\overrightarrow{OA}|(1-2\cos\theta)=4\cos^2\theta-2\cos\theta\geq-\dfrac{1}{4}$，所以$(\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB})_{\min}=-\dfrac{1}{4}$，此时$\cos\theta=\dfrac{1}{4}$，且$C_2B//OA$．

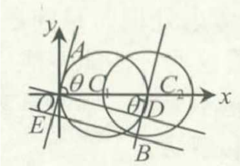

图7

3 教学思考

数学题目是数学知识与方法的载体，解题是数学思维活动的主要过程，在平时的学习过程中，应该勇于探索，积极尝试．深化对数学概念的理解，不仅应把握主干也要关注细节，也应重视知识之间的广泛联系．很多学生往往认为数学理性思维的过程只存在于解题的逻辑分析和运算过程之中，而对数学概念的学习只停留于简单的记忆认知，事实上，很多数学概念的产生和发展充满了思辨的过程．重视和深化数学概念的教学，理解概念的本质和内涵，可以使学生多角度的理解数学命题模式，让学生在解题过程中，更加明确研究对象，灵活运用相关的概念，有助于其对解题方法的预判和选择，更加高效的提取知识，拓宽解题视野，将解题思维的训练落到实处．

参考文献

[1]普通高中课程标准实验教科书 数学 4 必修（A 版）[M]．北京：人民教育出版社，2019

从一道作业谈平面向量问题的求解思路

陈碎娇 邱华先

浙江省云和中学（323600）

平面向量知识的考查，常见于高考试题中，且题型都比较新颖，解法也比较多样，既可以从代数角度来分析，也可以从几何角度进行思考，比较灵活．也正因如此学生在求解此类问题时，往往抓不住要点，无法迅速地找到问题的突破口．本文针对平面向量问题的求法，提出观点：以图为先．亦即从图形入手，分析问题特征，再辅以代数或几何方法进行剖析，从而解决问题．

1 问题的提出

笔者在高三复习平面向量时布置一道平面向量题：在ΔABC中，$(\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{AC})\perp\overrightarrow{CB}$，则角$A$的最大值为__________．

面对这道题时，很多学生不知道从何入手，于是通过讲评帮助学生梳理、提炼基本思路便成了这节课的价值所在．

2 课堂教学简录

笔者首先问了学生的思路是怎样的，他们基本都没什么好的想法，感觉找不到问题的突破口在哪，不知道怎么分析问题．于是，笔者又问了：你们画出图象没有？他们回答：画了，但画出的ΔABC没什么特殊性，所以导致找不到好的思路．对此，笔者又提醒学生考虑处理向量问题常用的有哪些思路和方法，看看这些方法能不能适用，然后再分析图形中哪些量是不变量，哪些是变量，再逐一引导出下面的思路和解法．

3 思考与探究

在平时教学中，笔者要求学生先对问题背景进行分析，特别是能将问题用图形表示的时候，一定要画出图形，从图形中往往能找到突破口．根据题意作出ΔABC图象，如图1所示．延长AC至点D，满足$\overrightarrow{AD}=3\overrightarrow{AC}$．由$(\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{AC})\perp\overrightarrow{CB}$，知$DB\perp CB$．

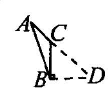

图1

这就是问题中所体现的图象应满足的条件．在解决向量问题时，通常有三种常用方法——基底法、坐标法、几何法．下面就在这个图象背景下运用这三种方法进行解决问题．

3.1 基底法

解决向量问题时，通常可以选择一组不共线的向量作为基底，运用这组基底来表示出其他的向量，从而解决问题．

解法1 设$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{c}$，$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{b}$(以$\boldsymbol{c},\boldsymbol{b}$为基底)，

则$\overrightarrow{CB}=\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b}$．

$\because(\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{AC})\perp\overrightarrow{CB}$，$\therefore(\boldsymbol{c}-3\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b})=0$，

展开得$4\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{c}^2+3\boldsymbol{b}^2$．

设ΔABC的角A,B,C所对边分别为a,b,c．

$\therefore 4bc\cos A=c^2+3b^2$，

即$\cos A=\dfrac{c^2+3b^2}{4bc}=\dfrac{1}{4}(\dfrac{c}{b}+\dfrac{3b}{c})$

$\geq\dfrac{1}{4}\times2\times\sqrt{\dfrac{c}{b}\times\dfrac{3b}{c}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$．